

Ministerul Educației, Cercetării și Inovării
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

Soluție

1. a) Prin calcul direct rezultă $\det A = 3(1 - m^2)$.

b) Dacă $m \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$ rezultă $\det A \neq 0$, deci $\text{rang}(A) = 3$.

Pentru $m = 1$ sau $m = -1$, există cel puțin un minor de ordin doi nenul în A , deci $\text{rang}(A) = 2$.

c) Dacă $m \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$, sistemul este compatibil determinat.

Pentru $m = 1 \Rightarrow \bar{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 3 & -1 \end{array} \right)$, care are rangul 2, egal cu rangul lui A , deci sistemul este compatibil

(nedeterminat).

Pentru $m = -1 \Rightarrow \bar{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 2 \\ -1 & 3 & 3 & -1 \end{array} \right)$, care are rangul 3, și cum $\text{rang } A = 2$, rezultă sistemul este

incompatibil.

2. a) Se verifică prin calcul direct că $x * y \in G_2$, $\forall x, y \in G_2$, adică operația „ $*$ ” este corect definită pe G_2 .

Folosind definiția se verifică și asociativitatea și comutativitatea operației. Elementul neutru este $e = \frac{7}{3}$, iar

simetricul oricărui element $x \in G_2$ este $x' = \frac{18x - 35}{9(x - 2)} = 2 + \frac{1}{9(x - 2)} \in (2, \infty) = G_2$.

b) Se arată că f este bijectivă și că $f(x * y) = f(x) \cdot f(y)$, $\forall x, y \in G_2$.

c) Dacă $x, y \in (\alpha, \infty)$ și $\alpha \geq 2$, atunci $x * y = 3(x - 2)(y - 2) + 6(\alpha - 2) + \alpha \geq \alpha$, deci G_α este parte stabilă a lui \mathbb{R} în raport cu operația „ $*$ ”.